

Infos : Listes & plans pour examen blanc
sur uncoche

Toutes les définitions de limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \boxed{} : \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?}$$

$$x \rightarrow x_0$$

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$$

$$x \rightarrow x_0^+$$

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

$$x \rightarrow x_0^-$$

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\exists M \geq 0 \text{ tq } \forall x \geq M$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\exists M \geq 0 \text{ tq } \forall x \leq -M$$

$$\lim f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\lim f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0$$

$$f(x) \geq M$$

$$\lim f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0$$

$$f(x) \leq -M.$$

Chapitre 5: Fonctions continues

Définition 5.1: (Ensemble ouvert/fermé)

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. On dit que

- (i) E est ouvert si $\forall x_0 \in E, \exists \delta > 0$ tq $\]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq E$.
- (ii) E est fermé si $\mathbb{R} \setminus E$ est ouvert.

Remarque 5.2:

- (i) Les ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\mathbb{R}$ & $\emptyset$
- (ii) Il existe des ensembles qui sont ni ouverts ni fermés.
($[0, 1[$)
- (iii) Les intervalles ouverts sont ouverts, les intervalles fermés sont fermés.

(iv) Si D est ouvert, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors, $\forall x_0 \in D$, f est définie au voisinage de x_0 .

(v) On peut montrer qu'une union quelconque d'ensembles ouverts est ouverte.

Définition 5.3 (Fonction continue)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Soit $x_0 \in D$. Supposons que f est définie au voisinage de x_0 .

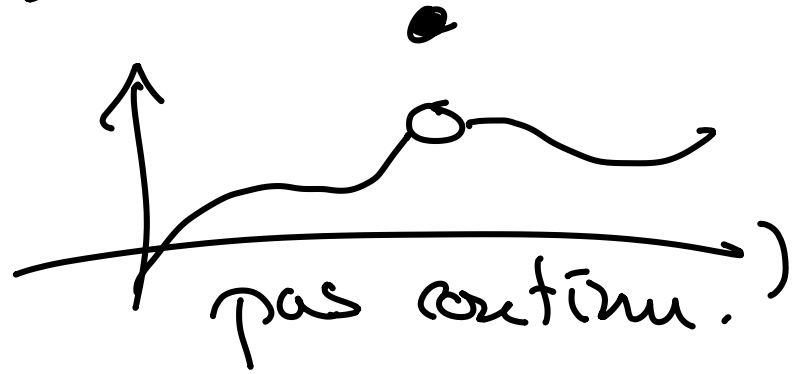
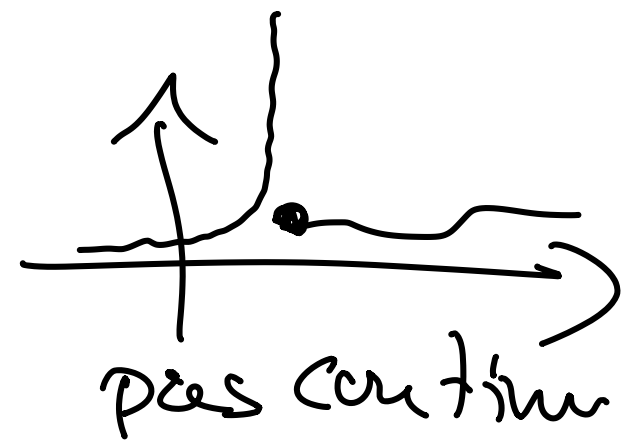
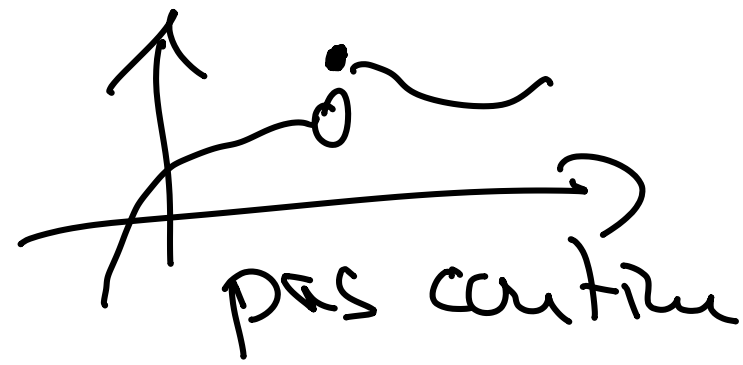
On dit que f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \text{i.e.}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

(ii) Supposons que D est ouvert. On dit que f est continue si $\forall x_0 \in D$, f est continue en x_0 , i.e.

$$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$



Remarque 5.4

Si f n'est pas continue en x_0 , il y a deux possibilités

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, mais $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Proposition 5.5

$D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en x_0 , et $h: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $f(x_0)$.

Alors,

(i) $f+g$ est continue en x_0

(ii) $f-g$ est continue en x_0

(iii) si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

(iv) $h \circ f$ est continue en x_0

(v) si $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ est tq $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,
 $\varphi(x) = f(x)$, alors, φ est continue en x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(-)$

$= h(\lim_{x \rightarrow x_0} -)$

Proposition 5.6 :

Les fonctions usuelles : les polynômes, les racines n-èmes
la valeur absolue, les fonctions trigonométriques
et leurs réciproques, l'exponentielle, le logarithme
sont continues là où elles sont définies.

Exemple 5.7

(i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, f est combinaison de fonctions
continues et est donc continue en x .

$$x_0 = 0$$

On a vu que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0). \text{ Donc, } f \text{ est continue}$$

en 0. Donc, f est continue partout $\Rightarrow f$ est continue.

(iii) Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ deux paramètres et la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{b \cdot x} & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ a + bx^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour quels paramètres a, b f est continue?

Pour $x > 0$ et $x < a$, f est continue comme combinaison de fonctions continues.

$$\boxed{x_0 = 0}$$

Faite du b'son
 $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*, x = x \cdot \frac{y}{y}$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(ax)}{b \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{b} \frac{\sin(ax)}{a \cdot x}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = \frac{a}{b}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a + bx^2 = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = a \Leftrightarrow b = 1.$$

$$f \text{ continue en } 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\Leftrightarrow a = 1. \quad \text{Ainsi, } f \text{ continue} \Leftrightarrow a = b = 1$$

Définition 5.8 (Prolongement par continuité)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$ tq f est définie au voisinage de x_0 et tq $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe. Alors, la fonction

$\tilde{f}_{x_0}: D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad \text{est continue.}$$

On appelle $\tilde{f}_{x_0}$ le prolongement par continuité de f
en x_0

Exemple 5.9

Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \\ &= 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 :

$\tilde{f}_0 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}_0(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Remarque 5.10 : Soient on écrit jushu f à la place de $\tilde{f}_0$

Définition 5.11 (continue à gauche / à droite)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

(i) Supposons que f est définie à gauche de x_0 .

On dit que f est continue à gauche en x_0

si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, i.e.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

(ii) Supposons que f est définie à droite de x_0

On dit que f est continue à droite en x_0 si

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, i.e.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tq $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

(iii) Supposons que $D = [a, b]$ avec $a < b$. On dit que f est continue si $\forall x_0 \in]a, b[, f$ est continue en x_0 , f est continue à droite en a et continue à gauche en b .

(iv) Supposons que $D = [a, +\infty[$. On dit que f est continue si $\forall x_0 \in]a, +\infty[, f$ est continue en x_0 et f est continue à droite en a .

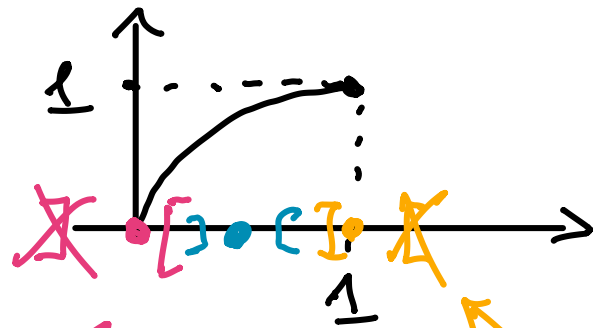
(v) Supposons $D =]-\infty, b]$. On dit que f est continue si $\forall x_0 \in]-\infty, b[, f$ est continue en x_0 et f est continue à gauche en b .

Remarque 5.12

Une fonction est continue en $x_0 \iff f$ est continue à droite et à gauche en x_0 .

Exemple 5.13:

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sqrt{x}$



$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

continuité à droite continuité à gauche.

Carnaval de Maîtres.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en aucun point: $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en exactement 1 point: $f(x) = x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$
continue en 0, discontinue ailleurs